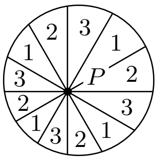
Площадь сектора

1. a) Перпендикулярные хорды AB и CD окружности ω радиуса r пересекаются в точке P. Докажите, что $PA^2 + PC^2 + PB^2 + PD^2 = 4r^2$.

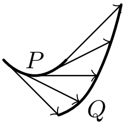
b) Внутри круглой пиццы отметили точку P и через неё провели $2n$ прямых, разбивающих плоскость на $4n$ равных угла. Куски пиццы занумеровали числам от 1 до $4n$ по ходу движения часовой стрелки и раздали n студентам так, что студенту i достались куски с номерами i, $i+n$, $i+2n$, $i+3n$. Докажите, что студенты получили равные по площади доли пиццы.

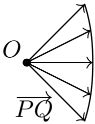


2. a) (`Пеано`) Пусть P, $Q \in C^1[a,b]$ – плоские кривые такие, что при любых $t_1 \neq t_2 \in [a,b]$ интервалы $P(t_1)Q(t_1)$ и $P(t_2)Q(t_2)$ не пересекаются. Докажите, что площадь, заметаемая отрезком $P(t)Q(t)$, равна

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left\| \big(Q(t) - P(t)\big) \times \big(\dot{P}(t) + \dot{Q}(t)\big) \right\| \mathrm{d}t.$$

b) (`Мамикон`) Более того, пусть вектор $\overrightarrow{PQ}$ в каждой точке касается кривой P. Докажите, что площадь, заметаемая вектором $\overrightarrow{PQ}$, равна площади касательного сектора (см. рисунки).





c) На круг радиуса r намотана нерастяжимая нить длины $2\pi r$. Найдите площадь, которую заметает натянутая нить при её полном сматывании с круга.

3. (`Кеплер`) Материальная точка на плоскости движется в центральном поле сил: $\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{r}$, где $r = |\vec{r}|$. Докажите, что за равные промежутки времени радиус-вектор $\vec{r}$ заметает равные площади.