

## Правило знаков Декарта

1. Через  $n_+(p)$  обозначим количество положительных корней (с учётом кратности) многочлена  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ , а через  $c(p)$  – число смен знака в последовательности его коэффициентов. Докажите, что числа  $n_+(p)$  и  $c(p)$  одной чётности и верно неравенство  $n_+(p) \leq c(p)$ .

2. У многочлена  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  ровно  $k \in \mathbb{N}$  ненулевых коэффициентов. Докажите, что  $p(x)$  имеет не более  $2k - 1$  различных действительных корней. Для каждого  $k$  постройте многочлен с  $k$  ненулевыми коэффициентами, которого ровно  $2k - 1$  действительных корней.

3. Пусть  $a_0 \neq 0$ ,  $a_n \neq 0$  и  $2m$  последовательных коэффициентов многочлена  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  равны нулю. Докажите, что многочлен  $p(x)$  имеет не менее  $2m$  мнимых корней (с учётом кратности).

4. Докажите, что для любых чисел  $a, b, c \in [0; 1]$  выполнено неравенство  $2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$ .

5. Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Докажите, что число смен знака в последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  больше или равно числу корней (с учётом кратности) квазимногочлена  $f(x) = a_1e^{\lambda_1x} + a_2e^{\lambda_2x} + \dots + a_ne^{\lambda_nx}$ , причём эти числа имеют одинаковую чётность.

6. (Гёльдер) Даны положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , а также числа  $p, q \in \mathbb{R}$  такие, что  $1/p + 1/q = 1$ . Докажите, что если  $p$  и  $q > 0$ , то

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q} \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Более того, докажите, что если одно из чисел  $p$  или  $q$  отрицательное, то выполнено обратное неравенство.