Теоремы Ролля и Лагранжа

1. Даны действительные числа a_0, a_1, …, a_n такие, что $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0$. Докажите, что у многочлена $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ есть действительный корень.

2. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и дифференцируема на интервале $(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$. Докажите, что $f'(\xi)=f(\xi)$ для некоторого $\xi\in(0,1)$.

3. **a)** Пусть $f\in C^1[a,+\infty)$ и $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Докажите, что существует $c\in(a,+\infty)$ такое, что $f'(c)=0$.
b) Пусть $\lambda\in\mathbb{R}$ и $p\in\mathbb{R}[x]$. Докажите, что многочлен $\lambda p(x)+p'(x)$ имеет не больше мнимых корней, чем $p(x)$.

4. Докажите, что $(x+1)\cos\dfrac{\pi}{x+1}>1+x\cos\dfrac{\pi}{x}$, $x\geq 2$.

5. Докажите, что $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$, если $b>a>0$.

6. Найдите все действительные числа x такие, что
$$2^x+5^x=3^x+4^x.$$

7. Функция $f(x)\in C([0,1])$ дифференцируемая на интервале $(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ найдутся такие различные числа x_1, x_2, …, $x_n\in(0,1)$, что $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\ldots+\dfrac{1}{f'(x_n)}=n$.

8. Функция $f(x)\in C([0,1])$ дифференцируемая на интервале $(0,1)$, причём $f(0)=0$ и $|f'(x)|\leq\lambda|f(x)|$ для некоторой постоянной $\lambda\in\mathbb{R}$. Докажите, что $f(x)\equiv 0$.

9. Функция $f(x)\in C^n([a,b])$ имеет на отрезке $[a,b]$ не менее n нулей (с учётом кратности). Докажите, что
$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\leq\frac{(b-a)^n}{n!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|.$$