Применение производной

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ верно неравенство $|f(b) - f(a)| \le |b - a|^2$.

2. Периодическая ли функция $f(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}x$?

3. Что больше: e^π или π^e?

4. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

5. Даны различные положительные числа a и b. Докажите, что $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.

6. a) Точки $A(t)$ и $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, двигаются с постоянными скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ соответственно. Докажите, что $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\overrightarrow{AB}| = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} \cdot \vec{v}_A + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \vec{v}_B$.

b) Для точек A_1, A_2, …, A_n нашли точку X, для которой сумма $\sum_{i=1}^n XA_i$ минимальна. Докажите, что если $X \ne A_i$, $1 \le i \le n$, то сумма единичных векторов, направленных от X к $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равна $\vec{0}$.

c) Дан треугольник ABC. Найдите точку T такую, что сумма $AT + BT + CT$ расстояний от неё до вершин треугольника будет наименьшей.

7. Докажите, что при умножении многочлена $(x+1)^{99}$ на любой ненулевой многочлен получается многочлен, имеющий не менее 100 ненулевых коэффициентов.

8. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f\big(g(x)\big)$ и $cf(x)$, где c – произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида $x^n - 1$ (при натуральном n)?