

Первообразные корни

1. Докажите, что $\text{ord}_{101} 2 = \varphi(101)$.
2. Число p простое. Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ положим $f(d) = |\{x \in \mathbb{Z}_p^* : \text{ord}_p(x) = d\}|$. Докажите, что
 - a) $f(d) = \varphi(d)$, если $f(d) \neq 0$;
 - b) $\sum_{d|(p-1)} f(d) = \sum_{d|(p-1)} \varphi(d) = p-1$;
 - c) $f(d) = \varphi(d)$ для любого делителя d числа $p-1$.
3. Пусть x – первообразный корень по простому модулю p . Докажите, что найдётся такое целое число y , что $x + yp$ – первообразный корень по модулю p^2 .
4. Пусть x – первообразный корень по модулю p^2 , где p – нечётное простое число. Докажите, что x – первообразный корень по модулю p^k , $k \in \mathbb{N}$.
5. Пусть x – первообразный корень по модулю p^k , где p – нечётное простое число и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что одно из чисел x или $x + p^k$ является первообразным корнем по модулю $2p^k$.
6. Докажите, что первообразный корень по модулю n существует, если и только если $n = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$, где p – нечётное простое и $k \in \mathbb{N}$. (Указание: докажите, что
 - a) $2^k \mid x^{2^{k-2}} - 1$ для любых нечётного x и целого $k \geq 3$;
 - b) если n отлично от $p^k, 2p^k$ (p – простое, $k \in \mathbb{N}$), то $n = ab$, где $\text{НОД}(a, b) = 1$ и $\varphi(a), \varphi(b)$ – чётные числа.)
7. Докажите, что первообразных корней по модулю $n \in \mathbb{N}$ ровно $\varphi(\varphi(n))$ штук (если они есть).
8. Для простого числа p найдите все такие $k \in \mathbb{N}$, что сумма $1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ делится на p .
9. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, что число $2^m + 100$ делится на 3^n .