Теория Рамсея для бесконечных графов

1. Дан полный граф G с бесконечным числом вершин, каждое ребро которого покрашено в один из конечного набора цветов. Докажите, что граф содержит бесконечный подграф, в котором все рёбра одного цвета.

2. Докажите, что из любой бесконечной последовательности натуральных чисел можно выбрать такую бесконечную подпоследовательность, что либо каждый её член делится на предыдущий, либо ни один из её членов не делится ни на какой другой.

3. Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ограниченные функции, а $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ещё одна функция. Предположим, что существуют такие положительные постоянные ε и δ, что из неравенства $f(x) - f(y) > \varepsilon$ следует неравенство $\max_i\bigl(g_i(x)-g_i(y)\bigr) > \delta$. Докажите, что функция $f(x)$ также ограничена.

4. Любая непустая конечная последовательность символов некоторого алфавита называется *словом.* Про каждое слово известно, является ли оно *хорошим* или *плохим.* Докажите, что любую бесконечную последовательность символов, начиная с некоторого её элемента, можно разбить на слова, все из которых либо хорошие, либо все плохие.

5. Пусть X – бесконечное множество, все подмножества размера n которого покрашены в m цветов. Докажите, что существует такое бесконечное подмножество $S \subset X$, что все его n-элементные подмножества имеют один и тот же цвет.

6. Докажите теорему Рамсея для конечных графов.