Лемма Ньюмана (Diamond lemma)

1. Пусть G – бесконечный ориентированный граф, не содержащий ориентированных циклов и бесконечных путей. Также известно, что если существуют рёбра $a \to b$ и $a \to c$, то существует по крайней мере одна вершина d, достижимая из b и c. Докажите, что для каждой вершины u графа G существует единственная вершина v без исходящих рёбер, достижимая из u.

2. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда мы добавили спичку. Процесс останавливается, когда больше нельзя сделать ни одного хода. Докажите, что финальное распределение спичек не зависит от порядка ходов.

3. Дана диаграмма Юнга. За ход разрешается стереть прямоугольник 1×2 или 2×1, если справа или ниже его нет других клеток диаграммы. Процесс останавливается, когда больше нельзя сделать ни одного хода. Докажите, что результат не зависит от порядка ходов.

4. На доске написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. За ход разрешается взять два числа, которые не делится друг на друга, и заменить их на их НОД и НОК. Докажите, что можно сделать лишь конечное число ходов и финальное множество чисел не зависит от выбора ходов.

5. На занятие пришли n школьников и принесли с собой конфеты. Общее количество конфет меньше, чем $n(n-1)/2$. Каждую минуту один из школьников отдаёт по одной своей конфете всем остальным. Докажите, что в какой-то момент у каждого школьника на руках будет строго меньше $n-1$ конфета и финальное распределение конфет не зависит от хода процесса.

6. a) В вершинах пятиугольника расставлены целые числа, сумма которых положительна. Если в трёх последовательных вершинах записаны числа x, y, z соответственно, и $y < 0$, то числа x, y, z заменяют на числа $x+y$, $-y$, $z+y$ соответственно. Докажите, что рано или поздно все числа станут неотрицательными.

b) Дан граф G, в каждой вершине i которого записано число $w_i \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую игру: за ход выбирается вершина i, для которой $w_i < 0$, после чего число w_i заменяется на $-w_i$, а для каждой смежной вершины j число w_j заменяется на $w_j + w_i$. Игра заканчивается, когда все числа w_i станут неотрицательными. Аня и Боря начали играть на копиях графа G. Докажите, что если у Ани игра закончилась за n ходов в некоторой позиции, то у Бори игра также закончится за n ходов в той же позиции.

7. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по нескольку в одной клетке). Есть два типа операций: 1) снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$; 2) снять две фишки из клетки с номером k и добавить по фишке в клетки с номерами $k-2$ и $k+1$. Докажите, что операции когда-то прекратятся и финальное состояние не зависит от порядка операций.