Симметрические многочлены

1. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – симметрический многочлен. Докажите, что существует единственный многочлен $g(y_1,\ldots,y_n)$ такой, что $f(x_1,\ldots,x_n)=g(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$.

2. Выразите следующие многочлены через элементарные симметрические многочлены:

a) $(a+b)(b+c)(c+a)$; **b)** $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$.

3. Пусть $f(x,y)$ – кососимметрический многочлен, т.е. $f(y,x)=-f(x,y)$. Докажите, что $f(x,y)\,\vdots\,(x-y)$ и частное является симметрическим многочленом.

4. Пусть α и β – корни соответственно многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдётся многочлен $h(x)\not\equiv 0$ с рациональными коэффициентами, корнем которого является $\alpha+\beta$.

5. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{10}$ является квадратом целого числа.

6. (Ньютон) Пусть $s_k=x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k$. Докажите, что $s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\ldots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k\equiv 0$, где $\sigma_{n+1}=\sigma_{n+2}=\ldots=0$.

7. Целые числа x_1, x_2, $\ldots$, x_5 таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_5$ и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2$ делятся на нечётное число n. Докажите, что $x_1^5+x_2^5+\ldots+x_5^5-5x_1x_2\ldots x_5\,\vdots\,n$.

8. На доске выписаны несколько комплексных чисел таких, что их сумма, сумма их квадратов, сумма их кубов и т.д. равны. Докажите, что эти суммы целые.

9. Все корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами лежат на окружности $\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$. Докажите, что все они являются корнями из единицы.