Линейные функции на плоскости

1. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y) = ax + by + c$, где a, b и c – заданные действительные числа, называется *линейной функцией* на плоскости. Докажите, что множеством нулей линейной функции служит либо прямая, либо плоскость, либо пустое множество.

2. Внутри треугольника ABC нашли три точки X, Y и Z, не лежащие на одной прямой, такие, что суммы расстояний от них до сторон треугольника равны. Докажите, что треугольник ABC правильный.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. На отрезке B_1C_1 отмечена точка P. Докажите, что расстояние то точки P до прямой BC равно сумме расстояний от точки P до прямых AB и AC.

4. Дан треугольник ABC и произвольная точка X. В треугольнике проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что площадь одного из треугольников XAA_1, XBB_1, XCC_1 равна сумме двух других.

5. a) (`прямая Гаусса`) Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.

b) (`теорема Ньютона`) Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

6. Докажите, что основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой и эта прямая перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.