

Лемма о пропорциональных проекциях

1. На плоскости даны две непараллельные направленные прямые k и ℓ , а также два вектора \vec{u} и \vec{v} . Через u_k и u_ℓ обозначим длины проекций вектора \vec{u} на прямые k и ℓ соответственно, а через v_k и v_ℓ — длины проекций вектора \vec{v} на эти прямые. Докажите, что векторы \vec{u} и \vec{v} коллинеарны, если и только если $u_k : u_\ell = v_k : v_\ell$.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Диагонали AC и BD пересекаются в точке X . В точке A восстановили перпендикуляр к прямой AB , в точке D — к прямой CD . Эти перпендикуляры пересеклись в точке Y . Докажите, что точки O , X и Y лежат на одной прямой.

3. Точки K и L — проекции середины M стороны BC остроугольного треугольника ABC на стороны AB и AC соответственно. Описанные окружности треугольников ABL и ACK пересекаются в точках A и P . Докажите, что $AP \perp BC$.

4. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке X . Пусть M и N — центры окружностей, описанных около треугольников $AХВ$ и $CХD$ соответственно. Докажите, что $OM = XN$.

5. а) Через v_{AB} , v_{AC} обозначим длины проекций вектора \vec{v} на прямые AB и AC соответственно. Докажите, что вектор \vec{v} перпендикулярен стороне BC треугольника ABC , если и только если $v_{AB} : v_{AC} = AC : AB$.

б) В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Точки O и I_A — центры описанной и A -внеписанной окружностей. Докажите, что $B_1C_1 \perp OI_A$.