Теорема Шпернера

1. Дано конечное множество X. Найдите количество всех наибольших цепей, состоящих из его подмножеств ($\varnothing = S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_{|X|} = X$), и количество наибольших цепей, содержащих заданное подмножество $S \subset X$.

2. Пусть $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ – антицепь из подмножеств n-элементного множества, т.е. $S_i \not\subset S_j$ при $i \neq j$. Докажите, что $1/C_n^{|S_1|} + 1/C_n^{|S_2|} + \ldots + 1/C_n^{|S_m|} \leq 1$.

3. (Шпернер) В n-элементном множестве выбрано m его подмножеств так, что ни одно из них не содержится ни в каком другом. Докажите, что $m \leq C_n^{[n/2]}$.

4. Тридцать одноклассников решили прийти друг к другу в гости. Каждый школьник может посетить любое количество человек за вечер, но в тот вечер, когда к нему должны прийти, он сам никуда не идёт. Докажите, что минимальное количество дней, в течение которых каждый может навестить всех, равно семи.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty)$. Докажите, что для любого открытого единичного интервала I существует не более $C_n^{[n/2]}$ наборов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, состоящих из ± 1, таких, что $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n \in I$.

6. В n-элементном множестве выбраны подмножества. Любые $k+1$ из них не образуют цепь. Какое наибольшее количество подмножеств могло быть выбрано?

7. На олимпиаде было 8 задач. Оказалось, что любые два участника решили разные наборы задач, причём обязательно нашлась задача, решённая первым из них и не решённая вторым. Какое наибольшее количество верных решений могло прочитать жюри олимпиады?