## 1 Разные инвесии

В задачах обычно используются разные инверсии, из наиболее известных:

1. Композиция инверсии с центром $A$, радиусом $\sqrt{AB \cdot AC}$ и отражения относительно биссектрисы $\angle BAC$.
2. Инверсия с центром $I$ и радиусом $r$, где $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$, $r$ — её радиус.
3. Инверсия с центром $H$ и радиусом $\sqrt{AH \cdot HA_1}$, где $H$ — ортоцентр $ABC$, а $A_1$ — основание высоты, опущенной из вершины $A$. (меняет местами описанную окружнсть и окружность 9 точек?)

Докажем несколько свойств первой инверсии:

1. Она меняет точки $B$ и $C$ местами.
2. Она переводит центр окружности $(ABC)$ в отражение точки $A$ относительно $BC$. А значит переводит основание высоты из А в диаметрально противоположную точку.
3. Она меняет местами прямую $BC$ и окружность $(ABC)$.
4. Она меняет местами инцентр и $A$-эксцентр, а также середину большей дуги и точку пересечения внешней биссектрисы угла $A$ с прямой $BC$.
5. Если $K \in (ABC)$, $T \in BC$ и $\angle BAK = \angle CAT$, то инверсия меняет $T$ и $K$ местами. (Куда перейдёт середина меньшей дуги $BC$?)

## 2 Задачи

1. Доказать неравенство Птолемея.
2. Пусть $\omega$ — описанная окружность прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle A = 90°$). Касательная к $\omega$ в точке $A$ пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Предположим, что $M$ — середина меньшей дуги $AB$ окружности $\omega$, и

прямая $PM$ вторично пересекает $\omega$ в точке $Q$. Касательная к $\omega$ в точке $Q$ пересекает прямую $AC$ в точке $K$. Докажите, что $\angle PKC = 90°$.

3. Пусть $\Omega$ — описанная окружность треугольника $ABC$. Окружность $\omega$ касается сторон $AC$ и $BC$ и внутренним образом касается окружности $\Omega$ в точке $P$. Прямая, параллельная $AB$, пересекающая внутренность треугольника $ABC$, касается $\omega$ в точке $Q$. Докажите, что $\angle ACP = \angle QCB$.

4. Пусть $I$ — центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник $ABC$, а $\omega$ — окружность, описанная около треугольника $ABC$. На дуге $CAB$ окружности $\omega$ нашлась такая точка $D \neq A$, что $AI = ID$. Точка $K$ симметрична точке $I$ относительно прямой $BC$. Докажите, что прямые $DK$ и $AI$ пересекаются на окружности $\omega$.

5. Дан треугольник $ABC$, на стороне $AC$ которого выбрали произвольную точку $D$. В треугольниках $ABD$ и $CBD$ провели биссектрисы $BK$ и $BL$ соответственно. Точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $KBL$. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников $ABL$ и $CBK$ лежит на прямой $OD$.

6. Пусть $ABC$ — остроугольный разносторонний треугольник. Пусть $X$ и $Y$ — две различные внутренние точки отрезка $BC$ такие, что $\angle CAX = \angle YAB$. Обозначим через $K$, $S$ основания перпендикуляров, опущенных из точки $B$ на прямые $AX$, $AY$ соответственно, а через $T$, $L$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $C$ на прямые $AX$, $AY$ соответственно. Докажите, что прямые $KL$ и $ST$ пересекаются на прямой $BC$.

7. Пусть $ABC$ — треугольник, а $O$ — его центр описанной окружности. Пусть $T$ — точка пересечения окружности, проходящей через $A$ и $C$ и касающейся прямой $AB$, с описанной окружностью треугольника $BOC$. Пусть $K$ — точка пересечения прямых $TO$ и $BC$. Докажите, что прямая $KA$ касается описанной окружности треугольника $ABC$.