1 Задачи

1. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. Внутренняя биссектриса угла A пересекает сторону BC и окружность Ω в точках D и L (отличных от A) соответственно. Пусть M — середина стороны BC. Окружность, описанная около треугольника ADM, пересекает стороны AB и AC вторично в точках Q и P (отличных от A) соответственно. Обозначим через N середину отрезка PQ, а через H — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на прямую ND. Докажите, что прямая ML касается окружности, описанной около треугольника HMN.

2. Пусть $ABCD$ — фиксированный выпуклый четырёхугольник, в котором $BC = DA$ и BC не параллельно DA. Две переменные точки E и F лежат на сторонах BC и DA соответственно и удовлетворяют условию $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC пересекаются в точке R. Докажите, что описанные окружности треугольников PQR при изменении E и F имеют общую точку, отличную от P.

3. Пусть $\triangle ABC$ — остроугольный треугольник, в котором $AB \neq AC$. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, а M — середина стороны BC. Пусть D — точка на стороне AB и E — точка на стороне AC такие, что $AE = AD$ и точки D, H, E лежат на одной прямой. Докажите, что прямая HM перпендикулярна общей хорде описанных окружностей треугольника $\triangle ABC$ и треугольника $\triangle ADE$.

4. Пусть треугольник ABC таков, что $\angle C = 90^\circ$, и пусть H — основание высоты, опущенной из вершины C. Точка D выбрана внутри треугольника CBH так, что CH делит отрезок AD пополам. Обозначим через P точку пересечения прямых BD и CH. Пусть ω — полуокружность с диаметром BD, пересекающая отрезок CB во внутренней точке. Через точку P проведена прямая, касающаяся ω в точке Q. Докажите, что прямые CQ и AD пересекаются на ω.

5. В остроугольном треугольнике ABC точки D, E и F — основания высот, проведённых из вершин A, B и C соответственно. Центры вписанных окружностей треугольников AEF и BDF обозначим через I_1 и I_2 соответственно; центры описанных окружностей треугольников ACI_1 и BCI_2 обозначим через O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что прямые I_1I_2 и O_1O_2 параллельны.