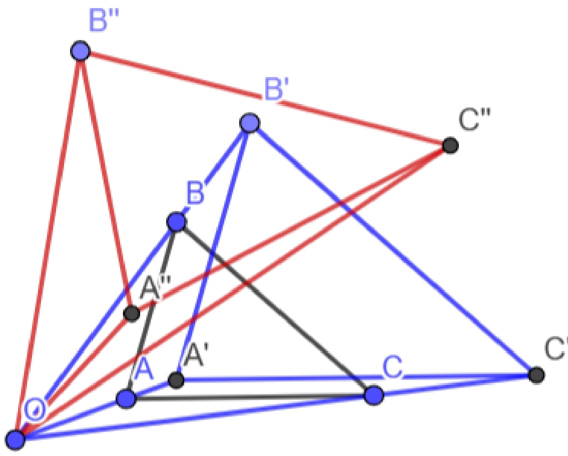
1 Поворотная гомотетия



Поворотная гомотетия - геометрическое преобразование плоскости, представляющее собой композициею поворота и гомотетии с одним и тем же центром. То есть:

$$S_{O,k,\phi} = R_{O,\phi} \circ X_{O,k} = X_{O,k} \circ R_{O,\phi}$$

В первых пунктах будет рассматриваться поворотная гомотетия S с центром O, переводящая отрезок AB в отрезок CD.

1. **(Центр)** Как найти центр поворотной гомотетии?
2. Докажите единственность центра поворотной гомотетии, переводящей AB в CD.
3. Докажите, что если O - центр поворотной гомотетии, переводящей AB в CD, то O также центр поворотной гомотетии, переводящей AC в BD.
4. Пусть S переводит AB в CD. На AB и CD лежат такие точки M и N, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$. Докажите, что S также переводит M в N. (а значит AM в CN и MB в ND)
5. **(Связь с т. Микеля)** Найдите все пары отрезков в полном четырёхсторонника, которые переводятся друг в друга поворотной гомотетией с центром в точке Микеля этого четырёхсторонника. Как связаны воробьи с поворотноной гомотетией и Микелем?
6. **(Подобные фигуры)**Было бы логично, что если S переводит отрезок AB в CD, то S будет переводить $\triangle ABE$ в $\triangle CDF$, когда они подобны. Всегда ли это так? (или вообще неправда)

   Примечание: понятно, что пункт 7 относится ко всем подобным фигурам, а не только к треугольникам.

2 Упражнения

1. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построены квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.

2. Пусть ABC — треугольник, а D, E, F — проекции инцентра треугольника ABC на BC, AC, AB соответственно. Пусть описанные окружности ABC и AEF пересекаются в точке K. Докажите, что KD делит $\angle BKC$ пополам.

3. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90°$.

4. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, а E и F — точки на сторонах AD и BC соответственно такие, что $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Луч FE пересекает лучи BA и CD в точках S и T соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников SAE, SBF, TCF и TDE проходят через одну общую точку.

5. Дан треугольник ABC. На меньшей дуге BC окружности (ABC) отмечена точка D. P и Q – основания перпендикуляров из D на AC и AB соответственно. M – середина AB, N – середина PQ. Докажите, что $\angle DNM = 90°$.

6. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что
$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad \text{и} \quad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$
Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит сторону CD пополам.

7. Дана трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ с $\angle ABC > 90°$. Точка M выбрана на боковой стороне AB. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных треугольников MAD и MBC соответственно. Описанные окружности треугольников MO_1D и MO_2C снова встречаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.