1 Еще упражнения

1. Докажите, что углы AMC, BMD и PMQ четырехсторонника $ABCD$ имеют общую биссектрису.
2. Точка H – ортоцентр треугольника ABC. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка F так, что $\angle AFH = 90°$. Докажите, что прямая FH проходит через середину отрезка BC.
3. Докажите, что направление прямой Гаусса изогонально направлению на точку Микеля относительно любого угла четырёхугольника.

2 Задачи

Понятно, что в задачах, связанных с точкой Микеля, бывает полезно отметить её, видеть ***4*** окружности, с ней связанные и видеть весь четырехсторонник (то есть систему из ***6*** точек).

1. Окружность с центром O проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Пусть M — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и KBN. Докажите, что $\angle OMB = 90°$.
2. Докажите теорему Микеля для пятиконечной звезды (звёздочка 1).
3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках O и M. Окружность ω с центром в точке O пересекает ω_1 и ω_2 в четырех различных точках A, C и B, D, соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке X, а прямые AD и BC в точке Y . Докажите, что $XY \perp OM$.
4. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC второй раз в точке D. Окружность, проходящая через B и C, пересекает сторону AB второй раз в точке E, а первую окружность второй раз в точке F. Докажите, что если точки A, E, D и C лежат на окружности с центром O, то $\angle BFO = 90°$.

5. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников APA_1 и CPC_1 во второй раз пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ADC. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

6. Пусть ABC — треугольник с $AB = AC$, и пусть M — середина BC. Пусть P — точка такая, что $PB < PC$ и PA параллельна BC. Пусть X и Y — точки на прямых PB и PC соответственно, так что B лежит на отрезке PX, C лежит на отрезке PY, и $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что четырехугольник $APXY$ вписанный.