1 Вокруг точки Микеля

Полный четырехсторонник — это система из четырех прямых (никакие три из которых не проходят через одну и ту же точку) и шести точек пересечения этих прямых.

Среди шести точек полного четырехсторонника есть три пары точек, которые еще не соединены прямыми. Отрезки прямых, соединяющие эти пары точек, называются диагоналями полного четырехсторонника. Во всех следующих свойствах пусть $ABCD$ будет четырехсторонником, таким, что лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Взяв любые три из четырех прямых полного четырехсторонника, мы можем получить четыре треугольника. Для полного четырехсторонника $ABCD$ этими треугольниками будут: ΔABQ, ΔBCP, ΔCDQ и ΔDAP.

1. **(Точка Микеля)** Докажите, что описанные окружности четырех треугольников, упомянутых выше, проходят через общую точку.

2. Докажите, что точка Микеля четырёхсторонника $ABCD$ лежит на прямой PQ тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ является вписанным.

3. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, вписанный в окружность ω с центром в точке O. Пусть R — пересечение диагоналей AC и BD. Пусть M — точка Микеля $ABCD$. Докажите, что:

   Точка M лежит на описанных окружностях ΔAOC и ΔBOD;

   Прямая OM перпендикулярна прямой PQ;

   Точки O, R, M лежат на одной прямой.

2 Всякие прямые

1. **(Прямая Симсона)** Докажите, что основания перпендикуляров из точки Микеля к сторонам полного четырёхсторонника лежат на одной прямой.
2. **(Прямая Обера)** Используя пункт 1 докажите, что ортоцентры четырех треугольников, упомянутых выше, лежат на одной прямой, которая параллельна прямой Симсона полного четырехсторонника.
3. **(Прямая Гаусса)** Используя пункт 2 докажите, что середины диагоналей полного четырехсторонника лежат на одной прямой, которая перпендикулярна прямым Симсона и Обера.

3 Упражнение

Пусть S — второе пересечение (ABR) и (CDR). Докажите, что:

Точки $P - R - S$ коллинеарны;

Четырехугольник $BCOS$ – вписанный;

Точки $Q - S - O$ коллинеарны;

Четырехугольник $ACPS$ – вписанный;

Четырехугольник $PMOS$ – вписанный;

Точка O является ортоцентром треугольника PQR.