Выигрышные и проигрышные позиции

1. На концах клетчатой полоски 1×20 стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой на одну или на две клетки. Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. В левом нижнем углу шахматной доски стоит фишка. Каждым ходом её можно двигать на одну клетку вправо, на одну клетку вверх или на одну клетку по диагонали "вправо-вверх". Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний угол доски.

3. В мешке лежат 1000 конфет. Двое по очереди выбрасывают из мешка любое число конфет, равное

a) степени двойки или 1; **b)** простому числу или 1.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. Есть две кучки конфет по n и m конфет. Игроки ходят по очереди. За ход игрок съедает все конфеты из одной кучки, а другую кучку делит на две (по своему выбору; в каждой из них должно остаться хотя бы по конфете). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Дано n кучек камней, в которых находится a_1, a_2, $\ldots$, a_n камней соответственно. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок может взять из какой-нибудь одной кучки любое ненулевое число камней и выбросить их. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. Шоколадка имеет форму прямоугольника 100×100, плитка с координатами $(13, 12)$ отравлена. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается разломить шоколадку на два прямоугольника и съесть неотрав-

ленную часть. Кто не может походить, тот проиграл.
7. Есть лестница с n ступеньками (занумерованными от 1 до n), на i-ой ступеньке лежит a_i монет. Два игрока ходят по очереди. За один ход разрешается переместить некоторое ненулевое число монет с i-ой на (i–1)-ую ступеньку или совсем убрать с лестницы, если $i = 1$. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.
8. Для каждой позиции в *равноправной* игре определим её число Шпрага-Гранди (SG) следующим образом: число SG позиции – это минимальное целое неотрицательное число, не совпадающее ни с одним из чисел SG тех позиций, которые можно получить из данной за один ход. Докажите, что если число SG начальной позиции равно 0, то проигрывает (т.е. не сможет сделать ход) первый игрок, иначе – второй.
9. Пусть есть две игры и два игрока. Каждый ход игрок может сделать либо в одной из этих игр, либо в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Каждая позиция в этой составной игре есть пара (p, q), где p – текущая позиция в первой игре, а q – во второй. Докажите, что $\mathrm{SG}\big((p, q)\big) = \mathrm{SG}(p) \oplus \mathrm{SG}(q)$.
10. Есть два коробка по 70 спичек в каждом. Два игрока ходят по очереди. Из первого можно брать 1 или 2 спички за ход, а из второго – 1, 2 или 3 спички за ход. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
11. В кучке 11 камней. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок может разбить на две непустые кучки любую кучку, в которой есть хотя бы три камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.