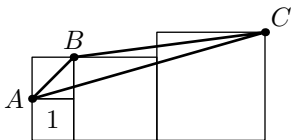


## Инварианты в геометрии

1. На плоскости нарисованы четыре квадрата (см. рисунок). Площадь двух наименьших квадратов равна 1. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .



2. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа в клетку. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек переместить вторую ножку в другой узел листа. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

3. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

4. В вершинах правильного  $n$ -угольника установили по лампочке. Первоначально горит ровно одна лампочка. За ход выбирают набор лампочек, которые находятся в вершинах правильного многоугольника, и если они все выключены, то их включают, а если они все включены, то их выключают. Можно ли для какого-либо  $n$  за несколько таких ходов включить все лампочки?

5. Внутри выпуклого  $2n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  взята точка  $P$ , не лежащая ни на одной из его диагоналей. Докажите, что точка  $P$  принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ .