Усиление предположения индукции

1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ докажите, что $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$.

2. Даны натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n такие, что НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Докажите, что найдутся целые x_1, x_2, $\ldots$, x_n такие, что $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = 1$.

3. Докажите, что для каждого целого $n \geq 3$ число $n!$ равно сумме n своих различных делителей.

4. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10^6 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

5. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n.

6. Назовём натуральное число *ровным*, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 77). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

7. На плоскости даны n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что существует n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1\ldots A_n$, имеющая по одному звену на каждой прямой.

8. В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что каждом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один невычеркнутый ноль.