

Дискретная непрерывность

1. В ряд выложено 50 белых и 50 чёрных шариков.
 - а) Крайние шарики белые. Докажите, что есть подряд идущие шарики (но не все), начиная с левого, среди которых поровну белых и чёрных.
 - б) Докажите, что найдутся 32 подряд идущих шарика, среди которых поровну белых и чёрных.
2. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
3. В каждой вершине правильного 100-угольника записано по числу так, что разность чисел, записанных в любых двух соседних вершинах, равна 1 или -1 . Докажите, что найдутся два равных числа, записанных в противоположных вершинах многоугольника.
4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.
5. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 монет, половина из которых – фальшивые. Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две непустые кучки. Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет или поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на 25-й день?
6. По окружности длины 1 по ходу движения часовой стрелки прыгает кузнечик. Длина прыжка равна иррациональному числу α . В некотором месте на этой окружности вырыта ямка шириной $\varepsilon \in (0, 1)$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в ямку.
7. а) На плоскости отметили $2n$ точек. Докажите, что

можно провести прямую так, что с каждой стороны от неё будет находиться по n точек.

б) На плоскости отметили $2n$ точек. Докажите, что найдётся круг, внутри которого лежит ровно n точек?

с) На плоскости отметили n синих и n красных точек общего положения ($n \geq 2$). Докажите, что есть прямая, в каждой из полуплоскостей относительно которой синих и красных точек поровну (но не нуль).

8. Датчик случайных чисел за одно действие уменьшает или увеличивает на 1 коэффициент перед x или свободный член в квадратном трёхчлене. После некоторого числа таких операций он преобразовал трёхчлен $x^2 - 20x + 22$ в трёхчлен $x^2 - 202x + 2$. Верно ли, что среди полученных в процессе квадратных трёхчленов есть такой, у которого целые корни?

9. На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина – чёрные. Докажите, что можно разрезать её по границам клеток на две равные части с равным числом чёрных клеток.

10. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число равно предыдущему, увеличенному на одну из его ненулевых цифр. Докажите, что последовательность содержит чётное число.

11. Дана возрастающая последовательность, состоящая хотя бы из трёх несократимых дробей. Первая из дробей равна $1/3$, последняя равна $1/2$. Известно, что разность соседних дробей равна единице, делённой на произведение их знаменателей. Докажите, что последовательность содержит дробь $2/5$.