

Сравнение со средним арифметическим

1. По кругу записаны 16 целых чисел, сумма которых равна 93. Докажите, что найдутся пять подряд записанных чисел, сумма которых не меньше 30.

2. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое дежурили вместе не менее 14 раз.

3. 1000 рублей разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем рублей в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем рублей в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой нельзя.)

4. В таблице 20×20 в каждой клетке стоит крестик или нолик, причём в каждом столбце ровно 10 крестиков. Докажите, что можно найти две строки, которые совпадают, по крайней мере, в 10 позициях.

5. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Нужно приложить первое ожерелье ко второму (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок можно гарантированно получить?

6. Сумма действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) равна 1. Докажите, что найдётся такая перестановка y_1, y_2, \dots, y_n этих чисел, что $y_1 y_2 + y_2 y_3 + \dots + y_n y_1 \leq \frac{1}{n}$.

7. Пусть p – простое число, а числа a_1, a_2, \dots, a_p – целые. Докажите, что существует целое число k , такое, что числа $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$ дают не менее $p/2$ различных остатков по модулю p .