

## Критерий перпендикулярности. Теорема Карно

1. Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

2. В треугольнике  $ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности, а точка  $I$  – центр вписанной. На лучах  $BC$  и  $AC$  отмечены соответственно точки  $A_1$  и  $B_1$  такие, что  $AB_1 = BA_1 = AB$ . Докажите, что  $A_1B_1 \perp OI$ .

3. (Карно) Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  соответственно на стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2.$$

4. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон вписанного четырехугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

5. (Штейнер) На плоскости отмечены шесть точек:  $A, B, C, A_1, B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1$  и  $C_1$  соответственно на прямые  $BC, AC$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A, B$  и  $C$  соответственно на прямые  $B_1C_1, A_1C_1$  и  $A_1B_1$ , также пересекаются в одной точке.

6. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.

7. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  – основания перпендикуляров из вершин  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  на прямую  $\ell$ . Докажите, что перпендикуляры из  $A_1, B_1, C_1$  соответственно на  $BC, AC, AB$  пересекаются в одной точке.