Телескопические суммы и произведения

1. Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ вычислите суммы:
a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; **b)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$; **c)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \cdot k$;

2. Докажите, что
a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$;
b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \frac{2n^2+2n}{2n^2+2n+1}$;

3. Докажите, что для любого натурального числа n выполнено неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$.

4. Вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$, где $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ при $k \geq 0$ (*последовательность Фибоначчи*).

5. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдите сумму $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

6. Для заданного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ вычислите произведения: **a)** $\prod\limits_{k=0}^{n} (1+2^{2^k})$; **b)** $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

7. На тараканьих бегах 20 тараканов выбегают друг за другом с интервалом в одну минуту и бегут с постоянными скоростями. Второй догнал первого через 2 минуты после своего старта, третий догнал второго через 3 минуты после своего старта, и так далее, двадцатый догнал девятнадцатого через 20 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта двадцатый таракан догнал первого?

8. Докажите, что для любого простого p числа от 1 до $p-1$ можно выписать в ряд $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ так, что все произведения $a_1a_2\ldots a_k$ различны по модулю p.