Упражнения

1. Докажите, что для любого натурального числа n существуют натуральные числа a, b и c, такие что $a^2-n=xy$, $b^2-n=yz$ и $c^2-n=xz$, где x, y и z — какие-то попарно различные натуральные числа.
2. Тройку натуральных, отличных от 1, чисел будем называть простоватой, если хотя бы два числа в ней простые. Докажите, что существует бесконечно много простоватых троек (x,y,z) таких, что $x^3-yz^3=2021$.
3. Для каждого натурального $n\geqslant 3$ определите, конечно или бесконечно количество $2n$-элементных множеств $S=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n\}$ таких, что (a_i) образуют арифметическую прогрессию, (b_i) образуют арифметическую прогрессию, НОД$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)=1$ и $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=\prod\limits_{i=1}^{n}b_i$.
4. Существуют ли такие натуральные числа a,b,c,d,e,m, что для них верно:
$$\begin{cases} a+b+c=d+e+m,\\ ab+bc+ac=de+em+dm,\\ abc=dem+3^{2021}\cdot 2^{2022}; \end{cases}$$
5. Докажите, что существует бесконечно много пар взаимно простых натуральных чисел (m,n) таких, что уравнение $(x+m)^3=nx$ имеет три различных целых корня.
6. Конечно или бесконечно множество троек натуральных чисел, больших 1, (a,b,c) таких, что число $(a^3-a)(b^3-b)(c^3-c)$ является полным квадратом?
7. Докажите, что для любого натурального, свободного от квадратов $d>1$ найдётся бесконечно много натуральных n таких, что $n!\,\vdots\,dn^2+1$.

Задачи

8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (m,n) таких, что $(m!)^n+(n!)^m+1\,\vdots\,m+n$.
9. Дана последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_n$ натуральных чисел. Для каждого ℓ от 1 до $n-1$ нашли следующие наборы:
$$\left(\text{НОД}(a_1,a_{1+\ell}),\ \text{НОД}(a_2,a_{2+\ell}),\ \ldots\ ,\ \text{НОД}(a_n,a_{n+\ell})\right).$$
Оказалось, что все найденные наборы состоят из одних и тех же n попарно различных чисел и различаются, возможно, порядком их следования. Может ли n быть равно **а)** 21; **б)** 2021?
10. Докажите, что для любого натурального n существует n-элементное множество S натуральных чисел такое, что для любых двух чисел $a,b\in S$, $x\in S$ делится на $a-b$, если и только если $x=a$ или $x=b$.
11. Докажите, что существует бесконечно много троек целых чисел (x,y,z) таких, что $|x|\neq|y|\neq|z|\neq|x|$ и $x^3+y^3+z^3=1$.
12. Докажите, что существует бесконечно много троек натуральных чисел (x,y,z) таких, что $x^4+y^3+z^2=3xyz$.