Неравенства Йенсена и Караматы

1. Функция $f(x)$ выпуклая на интервале (a, b). Пусть x_1, x_2, …, x_n – произвольные числа из этого интервала, а λ_1, λ_2, …, λ_n – произвольные положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

2. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3. Пусть a, b, $c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)\Big(1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(1 + \frac{1}{c}\Big) \ge 64.$$

4. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $y_1 \ge x_1 \ge$ $\ge x_2 \ge y_2$ и $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$. Докажите, что

$$f(y_1) + f(y_2) \ge f(x_1) + f(x_2).$$

5. Набор a чисел $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ *мажорирует* набор b чисел $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$ (пишут $a \succ b$), т.е.

$$a_1 \ge b_1, \quad a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2, \quad \ldots$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \ge b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1},$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпуклая. Докажите, что

a) сближением с фиксированной суммой набор a можно привести к набору b;

b) $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n) \ge f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n)$.

6. a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

7. Пусть x, y, $z > 0$. Докажите, что

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{yz}{x^2} \ge \frac{\sqrt{xy}}{z} + \frac{\sqrt{zx}}{y} + \frac{\sqrt{yz}}{x}.$$