Базис Гамеля $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$

1. Приведите пример нелинейной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что при всех x, $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. Дан набор из 100 действительных чисел такой, что независимо от того, какие 13 чисел из набора выбрать, в наборе найдутся 8 чисел, которые имеют то же арифметическое среднее, что и выбранные 13 чисел. Докажите, что все числа в наборе равны.

3. Докажите, что прямоугольник размера $1 \times h$, где h иррационально, нельзя замостить конечным набором квадратов (так, чтобы внутренности квадратов не пересекались и весь прямоугольник был покрыт).

4. Пусть B – некоторый базис Гамеля пространства $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$, а λ – произвольно выбранное действительное число, отличное от 1. Докажите, что найдётся элемент базиса $v \in B$ такой, что $\lambda v \notin B$.

5. Для чисел $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ нашил все попарные разности $x_j - x_i$, где $j > i$. Оказалось, что каждая разность, за исключением 1, встретилась хотя бы дважды. Докажите, что все x_i рациональны.

6. Дан многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ степени $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что
a) существуют периодические функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{n+1}(x)$ такие, что $p(x) \equiv f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_{n+1}(x)$;
b) многочлен p нельзя представить в виде суммы n периодических функций.

7. (`Ден`) Докажите, что куб нельзя разрезать плоскостями на части, из которых можно было бы составить равновеликий ему правильный тетраэдр.