Многочлены Чебышёва

1. Последовательность многочленов $\big(T_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ определяется рекуррентно: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ и

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что $T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

2. Числа x_1, x_2, …, $x_n \in [-1, 1]$ попарно различные. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} 1/\prod_{j\neq i} |x_j - x_i| \geq 2^{n-2}$.

3. Пусть $P \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен степени n, старший коэффициент которого равен 1. Докажите, что если $|P(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ при всех $x \in [-1, 1]$, то $P(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

4. Пусть $P \in \mathbb{R}[x]$ – приведённый многочлен положительной степени. Оказалось, что $|P(x)| \leq 2$ при всех $x \in [a, b]$. Докажите, что $b - a \leq 4$.

5. Дан многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ степени $n \in \mathbb{N}$ такой, что $|P(x)| \leq 1$ при всех $x \in [-1, 1]$. Докажите, что для любого $x \notin [-1, 1]$ верно неравенство $|P(x)| \leq |T_n(x)|$.

6. Докажите, что если $|y| > 1$, то выполнено равенство

$$T_n(y) = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 1})^n + \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 1})^n.$$

7. Пусть a_0, a_1, …, a_n – действительные числа такие, что $|a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \leq 1$ при всех $x \in [-1, 1]$. Докажите, что тогда при всех $x \in [-1, 1]$ выполнено неравенство $|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n| \leq 2^{n-1}$.

8. a) Для любого натурального n приведите пример многочлена P с целыми коэффициентами такого, что

$$P(x + x^{-1}) \equiv x^n + x^{-n}.$$

b) Докажите, что если оба числа α и $\cos(\alpha\pi)$ рациональные, то $\cos(\alpha\pi) \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}$.