Формула и неравенство Абеля

1. Докажите, что для произвольных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено равенство

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + \ldots$$
$$+ (a_{n-1} - a_n)(b_1 + \ldots + b_{n-1}) + a_n(b_1 + \ldots + b_n).$$

2. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Докажите, что для произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ верны неравенства

$$a_1 \min_k \sum_{i=1}^{k} b_i \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq a_1 \max_k \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

3. a) Даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_1 \leq 1$, $a_1 + a_2 \leq 2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq n$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

b) Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – инъективное отображение. Докажите, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(n)}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

4. a) Даны положительных числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, что $x_1y_1 \leq x_2y_2 \leq \ldots \leq x_ny_n$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ при $1 \leq k \leq n$. Докажите, что $x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} \leq y_1^{-1} + y_2^{-1} + \ldots + y_n^{-1}$.

b) Конечное множество S натуральных чисел таково, что у любых двух его различных подмножеств различные суммы элементов. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества S меньше 2.

5. На плоскости нарисована ломаная $P_0P_1 \ldots P_n$ такая, что ориентированные углы $\angle P_0P_1P_2$, $\angle P_1P_2P_3$, $\ldots$, $\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n$ равны и выполнены неравенства

$$P_0P_1 > P_1P_2 > \ldots > P_{n-1}P_n.$$

Может ли быть так, что $P_0 \equiv P_n$?