Теорема (Понселе). Пусть Γ, γ — невырожденные коники общего положения, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — точки Γ, не лежащие на γ. Тогда если существует $n-$угольник, одновременно вписанный в Γ и описанный вокруг γ, все вершины которого не принадлежат γ, и известно, что все прямые X_1X_2, X_2X_3, $\ldots$, $X_{n-1}X_n$ касаются γ, то X_nX_1 также касается γ.

1. Даны попарно различные прямые $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_6$. Обозначим $L_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$, $i \neq j$. Докажите, что прямые $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_6$ касаются некоторой коники если и только если точки $L_{12}L_{34} \cap L_{45}L_{61}$, L_{25} и L_{36} лежат на одной прямой.

2. а) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в конику Γ так, что все шесть рассматриваемых вершин попарно различны. Докажите, что шесть прямых, содержащих стороны этих треугольников, касаются некоторой коники γ.

б) Докажите теорему Понселе для случая $n = 3$.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — хороший многоугольник, вписанный в Γ и описанный около γ, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — точки Γ, для которых B_iB_{i+1} касается γ, $\forall i \in \overline{2, n-1}$. Для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ определим $I_p = A_pA_{p+1} \cap B_pB_{p+1}$.

3. а) Предположим, точка $X = B_pA_q \cap A_pB_q$ лежит на прямой I_pI_q, причём $p < q$ и точки I_p, I_q, X попарно различны. Докажите, что точки X, I_{p-1}, I_{q+1} попарно различны и коллинеарны.

б) В обозначениях предыдущей задачи предположим, что точки X, I_{p-1}, I_{q+1} попарно различны и коллинеарны. Тогда точки $X' = A_{p-1}B_{q+1} \cap B_{p-1}A_{q+1}$, I_{p-1}, I_{q+1} также попарно различны и коллинеарны.

в) Докажите, что точки $I = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $X = A_2B_{n-1} \cap B_2A_{n-1}$ и $I' = A_{n-1}A_n \cap B_{n-1}B_n$ попарно различны и коллинеарны.

4. Докажите теорему Понселе для $n \geqslant 4$.

Задачи

5. Докажите, что точка пересечения диагоналей всех четырехугольников, вписанных в окружность Ω и описанных вокруг окружности ω, не зависит от выбора четырехугольника.

6. Дан треугольник ABC со вписанной окружностью (I) и описанной окружностью (O). Пусть (I) касается BC в точке B, а $U \neq D$ — вторая точка пересечения AD и (I). Предположим, касательная к (I) в точке U пересекает (O) в точках Y и Z. Через $d_Y \neq YZ$ обозначим касательную к (I) из Y, аналогично определим прямую d_z. Докажите, что точки d_Y, d_Z и A-симедиана треугольника треугольника ABC пересекаются в одной точке.