Тригонометрическая форма комплексного числа

1. Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Докажите, что $z_1z_2=r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$.

2. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Вычислите **a)** $(1+i)^n$; **b)** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$.

3. **a)** Пусть $\varphi\in\mathbb{R}$. Выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.
b) Можно ли так отметить 100 точек на единичной окружности, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональными?

4. Пусть $z+z^{-1}=\sqrt{3}$, $z\in\mathbb{C}$. Найдите $z^{30}+z^{-30}$.

5. Пусть $\varphi\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Упростите выражения
a) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$;
b) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi$.

6. Пусть $\varphi\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что уравнение $z^n=r(\cos\varphi+\sin\varphi)$ имеет ровно n решений:
$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n.$$

7. Даны числа α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ такие, что $\cos\alpha+\cos\beta+$ $+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$. Докажите, что $\cos(2\alpha)+$ $+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=0$.

8. Точки A_1, A_2, …, A_n лежат выше оси Ox, а точки B_1, B_2, …, B_m – ниже оси Ox. На оси Ox нашлись точки C_1, C_2, …, C_{n+m+1} такие, что для каждого индекса j верно равенство $\angle A_1C_j\infty+\ldots+\angle A_nC_j\infty=$ $=\angle B_1C_j\infty+\ldots+\angle B_mC_j\infty$, где через $\angle PC_j\infty\in[0,\pi]$ обозначен угол между вектором $\overrightarrow{C_jP}$ и положительным направлением оси Ox. Докажите, что $n=m$ и набор точек A_1, A_2, …, A_n симметричен набору точек B_1, B_2, …, B_m относительно оси Ox.