Количество и сумма делителей числа

1. Через $\tau(n)$ обозначим количество делителей натурального числа n. Вычислите $\tau(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m})$, где p_1, p_2, …, p_m – попарно различные простые числа.

2. Докажите, что $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

3. В тюрьме 100 камер, пронумерованные числами от 1 до 100. Шериф, осуществляя частичную амнистию, поступил следующим образом. Сначала он открыл все камеры. Затем запер каждую вторую камеру. На третьем этапе он повернул ключ в замке каждой третьей камеры (открыл запертые и запер открытые). Продолжая действовать таким образом, на сотом этапе он повернул ключ только в замке сотой камеры. Укажите номера всех камер, которые оказались открытыми.

4. Пусть d_1, d_2, …, d_n – это все натуральные делители числа 10!. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1+\sqrt{10!}}+\frac{1}{d_2+\sqrt{10!}}+\ldots+\frac{1}{d_n+\sqrt{10!}}.$$

5. Через $\sigma(n)$ обозначим сумму делителей натурального числа n. Вычислите $\sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m})$, где p_1, p_2, …, p_m – попарно различные простые числа.

6. Докажите, что $\sigma(n) \geq \tau(n)\sqrt{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

7. Докажите, что если $n+1 \,\vdots\, 24$, $n \in \mathbb{N}$, то и $\sigma(n) \,\vdots\, 24$.

8. Натуральное число n называется *совершенным*, если сумма его собственных делителей (т. е. всех без самого числа) равна n, например, 6 и 28. Докажите, что

a) если число 2^p-1 простое, то $2^{p-1}(2^p-1)$ – совершенное число;

b) любое чётное совершенное число имеет вид $2^{p-1}(2^p-1)$, где число 2^p-1 простое.