Лемма Кёнига о бесконечном пути

1. (`Кёниг`) Пусть G — связный локально конечный (т.е. степень каждой вершины конечна) бесконечный граф. Докажите, что в G имеется бесконечный простой путь.

2. Дан бесконечный набор конечных множеств A_1, A_2, … Для любого конечного поднабора A_{n_1}, A_{n_2}, …, A_{n_m} существуют попарно различные элементы x_1, x_2, …, x_m такие, что $x_j \in A_{n_j}$, $1 \le j \le m$. Докажите, что существуют попарно различные элементы $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … Верно ли утверждение задачи для бесконечного набора произвольных бесконечных множеств?

3. Имеется конечное множество тетрадных типов с неограниченным количеством тетрад каждого типа. Требуется покрыть плоскость тетрадами таким образом, чтобы любые две смежные тетрады соприкасались сторонами с одинаковыми числами на них. Докажите, что если можно покрыть верхний правый квадрант плоскости, то можно покрыть и всю плоскость.

4. Пусть A – бесконечное множество конечных слов в алфавите Σ. Докажите, что найдется такое бесконечное слово в алфавите Σ, что сколь угодно длинное его начало является началом какого-нибудь слова из A.

5. Раскраску вершин графа назовём *правильной*, если любые две смежные вершины в нём разного цвета. Граф называется *k-раскрашиваемым*, если его можно правильно раскрасить, используя k цветов. Докажите, что граф со счётным числом вершин k-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда каждый конечный подграф в нём k-раскрашиваемый.