Определение

Пусть даны точка O и некоторая длинна r. *Инверсией* с центром O и радиусом r называется преобразование, которое каждую точку $A \neq O$ переводит в A', лежащую на луче OA и удовлетворяющую $OA' \cdot OA = r^2$. Так же данной преобразование называют инверсией относительно *инверсией* относительно окружности Γ с центром O и радиусом r.

Основные свойства

- Пусть A точка внутри ω и A' её инверсный образ. Пусть $A'X$ и $A'Y$ касательные из A'. Тогда A - середина XY.
- Если A' и B' образы точек A и B, то A, A', B и B' лежат на одной окружности.
- Пусть z некоторое комплексное число. Тогда образ z после инверсии относительно единичной окружности это $\frac{1}{\bar{z}}$.
- Прямая проходящая через центр инверсии переходит в саму себя.
- Прямая, которая не проходит через центр инверсии перейдёт в окружность, которая проходит через центр инверсии. Причём центр этой окружности будет лежать на прямой, которая проходит через центр инверсии и перпендикулярна исходной прямой.
- Окружность, которая не проходит через центр инверсии перейдёт в окружность, которая не проходит через центр инверсии
- Окружность, которая не проходит через центр инверсии перейдёт в окружность, которая не проходит через центр инверсии.
- Центр инверсии, которая переводит ω в Ω так же является их центром положительной гомотетии.
- Центр инверсии, которая переводит ω в Ω так же является их центром положительной гомотетии.
- Пусть ω и Ω две ортогональные окружности. Тогда инверсия относительно ω переводит Ω в себя же.
- Если A' и B' образы точек A и B, тогда имеет место следующая формула

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB}$$

Часто встречающиеся инверсии

- Пусть высоты AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке H. Рассмотрим инверсию с центром A и радиусом $\sqrt{AH \cdot AD}$. Куда перейдут все 6 точек?
- Инверсия относительно вписанной в треугольник окружности.
- Инверсия с центром в H и радиусом $\sqrt{HD \cdot HA}$ + симметрия относительно H.
- Инверсия с центром в A и радиусом $\sqrt{AB \cdot AC}$ + симметрия относительно биссектрисы угла $\angle A$.

Что же инверсия делает с известными картинками?

1. **Лемма Архимеда** Окружность ω касается хорды MN окружности γ в точке B, а окружности γ касается в точке A. Тогда AB является биссектрисой угла $\angle MAN$. Где тут можно делать инверсию?
2. **Точка Шалтая**. $A-$ точкой Шалтая треугольника ABC называется проекция ортоцентр на медиану AM. Где тут можно делать инверсию?
3. **Точка Болтая**. $A-$ точкой Болтая треугольника ABC называется проекция центра описанной окружности на симмедиану AL. Где тут можно делать инверсию?
4. **Лемма 255**. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках F и E соответственно, а биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает EF в точке P. Докажите, что $\angle BPC = 90°$.

Когда применять инверсию?

Для начала поговорим когда стоит и не стоит применять инверсию. Инверсию стоит применять в случае если:

- Много касающихся объектов. Например если есть две окружности, которые касаются друг друга, то после инверсии в точке касания они перейдут в две параллельные прямые.
- Большое количество окружностей, который проходят через одну точку. Инверсия относительно этой точки уберет все эти окружности, а очень часто чем меньше окружностей, тем проще.
- После инверсии картинка переходит сама в себя. Часто это может дать полезную информацию. Наглядный пример: Лемма Архимеда.

Инверсию не стоит применять если:

- Какие-то условия на углы, от которых не получается избавиться с помощью окружностей. Инверсия не очень хорошо дружит с углами.
- В задаче практически нету окружностей и очень много прямых.

Примеры

Пример 1. Пусть $ABCD$ четырехугольник диагонали, которого AC и BD перпендикулярны и пересекаются в E. Докажите, что отражения точки E относительно AB, BC, CD и DA лежат на одной окружности.

Сначала кажется, что задача выглядит странно для инверсии так как на ней нету окружностей. Однако.

a) Попробуйте как-нибудь переопределить отражения точки E через пересечение каких-то окружностей

b) Почему мы хотим применить инверсию? Найдите самую подходящую точку для этого.

c) Сформулируйте как будет выглядеть задача после инверсии и поймите почему она очевидна.

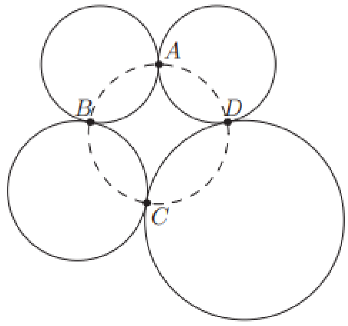
Пример 2. Пусть $ADBE$ четырехугольник вписанный в окружность с диаметром AB, диагонали которого пересекаются в C. Пусть $\omega-$ описанная окружность треугольника BOD, где O - середина AB. Пусть F - точка на ω, диаметрально противоположная O, и пусть луч FC пересекает ω второй раз в G. Докажите, что A, O, G, E лежат на одной окружности.

a) На картинке присутствует сразу три окружности. Подумайте относительно какой нужно сделать инверсию, чтобы максимально сильно упростить картинку.

b) Сформулируйте условие задачи после инверсии и найдите на картинке окружность девяти точек.

Задачи

5. Пусть ABC прямоугольный треугольник у которого $\angle C = 90^\circ$ и пусть X и Y точки на отрезках CA и CB соответственно. Рассмотрим четыре окружности проходящие через C с центрами A, B, X и Y. Докажите, что четыре точки, которые лежат ровно на двух из этих четырех окружностей лежат на одной окружности.
6. **Неравенство Птолемея.** Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ верно неравенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$, причём оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $ABCD$ вписанный.
7. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 окружности, такие что ω_i касается ω_{i+1} и ω_{i-1}. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.



8. Пусть AB - диаметр окружности Γ, $P-$ точка на окружности Γ. ω - окружность с центром в точке P, касающаяся прямой AB в точке H. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей Γ и ω делит PH пополам.
9. Пусть A, B и C три коллинеарные точки и P точка не на этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ и $\triangle PCA$ лежат на одной окружности, которая проходит через P.
10. Рассмотрим полуокружность с центром O и диаметром AB. Прямая пересекает AB в точке M и полуокружность в точках C и D, так что $MC > MD$ и $MB < MA$. Положим, что (AOC) и (BOD) пересекаются в точке K отличной от O. Докажите, что $\angle MKO = 90°$.
11. Пусть ABC треугольник. Окружность с центром I касается сторон треугольника в AB, AC и BC в точках F, E и D соответственно. G_1 - центр тяжести треугольника DEF. O центр описанной окружности ABC. Докажите, что G_1 лежит на прямой OI.
12. Пусть KL и KN касательные из точки K к окружности ω. M - точка на продолжении KN за точку N, а P - вторая точка пересечения окружности ω с описанной окружностью треугольника KLM. Q - основание перпендикуляра, опущенного из вершины N на прямую ML. Докажите, что $\angle MPQ = 2\angle KML$.
13. Пусть I - центр вписанной окружности треугольника ABC. Окружность с центром в точке A, проходящая через I пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что прямая MN касается вписанной окружности треугольника ABC.
14. Пусть P - точка внутри треугольника ABC такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

Пусть точки D и E - центры вписанных окружностей треугольников APB и APC соответственно. Докажите, что прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке.
15. В треугольнике ABC угол $\angle A = 60°$. На сторонах AB и AC выбраны точки K и L соответственно, так что $BK = KL = LC$. Докажите, $\angle KLC = 2\angle ABC$.
16. Точка M - середина биссектрисы AD треугольник ABC, $I-$ центр его вписанной окружности. Прямая BM повторно пересекает окружность, описанную около треугольника BIC в точке F. Докажите, что $\angle CFA = 90°$
17. Пусть ABC - остроугольный треугольник, $\Gamma-$ его описанная окружность, H - ортоцентр, а F - основание высоты, опущенной из вершины A. M - середина стороны BC. Q и K - точки на Γ такие, что $\angle HQA = \angle HKQ = 90°$. Докажите, что описанные окружности треугольников KQH и FKM касаются друг друга.

Инвосимметрия

Рассмотрим для треугольника ABC следующее преобразование: композицию инверсии с центром A и радиусом $\sqrt{AB \cdot AC}$ и симметрию относительно биссектрисы угла $\angle A$.

18. **a)** Докажите, что композиция двух таких преобразований есть тождественное преобразование.

    b) Докажите, что образом центра вписанной окружности является центр вневписанной окружности, которая касается отрезка BC.

    c) Докажите, что образом центра описанной окружности треугольника ABC является точка, симмеричная A относительно BC.

19. Окружность ω вписана в угол BAC треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке T. Обозначим её точки касания со сторонами AB и AC через X и Y соответственно. I центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть вневписанная окружность, касается стороны BC в точке Q. **a)** Докажите, что $\angle BAT = \angle CAQ$; **b)** докажите, что I лежит на прямой XY.

20. Пусть Ω описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P и дуги BC окружности Ω, не содержащей точку A в точке Q. Докажите, что если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle BAP = \angle CAQ$.

21. В треугольнике ABC с описанной окружностью ω пересекает BC в точке D, а ω в точке E. Окружность с диаметром DE пересекает ω в точке F. Докажите, что AF - симмедиана треугольника ABC.

22. Дан треуголник ABC. Одна окружность проходит через точку B и касается прямой AC в точке A, а вторая проходит через точку C и касается прямой AB в точке A. Докажите, что вторая точка пересечения этих окружностей лежит на симмедиане треугольника ABC.

23. Пусть Ω описанная окружность треугольника ABC. Пусть P и Q середины меньшей и большей дуги AC окружность Ω соответственно. Пусть M - основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC делит отрезок BP пополам.

24. Пусть O центр описанной окружности ABC. Окружность (BOC) пересекает окружность девяти точек в точках P и Q. Докажите, что $\angle BAP = \angle CAQ$.

25. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающие окружности γ и ω с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся γ и ω внешним образом и проходящая через A, касается и описанной окружности треугольника ABC.