Теорема Холла

1. (Холл) В деревне живут n юношей и несколько девушек. Докажите, что всех юношей можно поженить на знакомых им девушках, если и только если для любого целого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и любой группы из k юношей найдётся не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k юношей.

2. Круговой турнир по теннису (не бывает ничьих), в котором участвовало $2n$ команд, длился $2n-1$ день. Каждая из команд играла ровно одну игру в день и в течение турнира сыграла со всеми по одному разу. Обязательно ли в каждый день турнира можно выбрать по одной команде, которая победила в этот день, так, что все выбранные команды будут различны?

3. У Пети есть два листа бумаги размера 10×10. Вася расчертил их на 100 многоугольников равной площади, а после положил один лист поверх другого. Докажите, что Петя сможет воткнуть 100 булавок в верхний лист, проколов все 200 многоугольников.

4. Пусть $d < n$. Докажите, что если для любого целого $k \in \{d+1, d+2, \ldots, n\}$ и любой группы из k юношей найдётся не менее $k-d$ девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k юношей, то $n-d$ юношей можно поженить на знакомых им девушках.

5. В классе учатся 42 школьника. Среди любых 33 одноклассников найдутся мальчик и девочка, которые дружат между собой. Докажите, что в классе можно образовать не менее 10 непересекающихся пар друзей, состоящих из мальчика и девочки.