Функциональные уравнения

Запись $f : S \to T$ означает, что функция f определена на всем множестве S и принимает значения из множества T. Например, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - это стандартная функция на действительных числах.
Попробуйте как-нибудь что-нибудь подставляя, делая замены или другими методами решить следующие функциональные уравнения:

1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(2x + 1) = 4x - 3.$$

Стандартные слова из первой задачи подразумеваются и в каждой последующей, если не сказано иное

2. $f(x)^3 + f(y) = x^3 + 3x^2 + 3x + y + 2$.
3. $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.
4. $f(x)f(y) = f(7x - y)$.
5. $f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4)$.

Функция называется *инъективной*, если для любых $a \neq b \in S$ верно $f(a) \neq f(b)$. То есть инъективная функция - эта та, у которой значения не повторяются. Например $f(x) = x+3$ инъективная, а $f(x) = x^2$ - нет, потому что $(-1)^2 = 1^2$.
Функция называется *сюръективной*, если она принимает все значения множества T. Например, $f(x) = x + 1$ сюръективная, а $f(x) = x^2$ - нет, потому что она не принимает отрицательные значения.
Функция, являющаяся и сюръективной, и инъективной называется *биективной*.

6. Докажите, что если $f(f(x)) = x$, то f биективна.
7. Доказав, что f сюръективная (или другим способом), решите следующее функциональное уравнение
$$f(f(x) + 2f(y)) = f(x + y) + y.$$
8. $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$.

В некоторых задачах бывает полезно рассматривать такие α, для которых $f(\alpha) = 0$.

Задачи

9. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, такие что

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

10. Найдите все действительные a, для которых существует биективная функция f, для которой
$$f(f(x)) = x^2 f(x) + ax^2.$$

11. $1 + f(xy) = f(x + f(y)) + (y - 1)f(x - 1)$.

12. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такие что для всех $x, y \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

13. $f(f(x) + f(y)) = (x + y)f(x + y)$.

14. $f(x + f(y)) = xf(y)$.

15. $f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy$.

16. $f(f(x + f(y)) - 1) = f(x) + f(x + y) - x$.

17. $f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$.