Скалярное произведение

1. Угол между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ равен α. Докажите, что $|a| \cdot |b| \cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 6\sin x \cdot \cos y + 2\sin x \cdot \sin y + 3\cos x$.

3. Даны действительные числа a, b, c и d такие, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$. Найдите $ab + cd$.

4. Докажите, что из пяти векторов всегда можно выбрать два так, чтобы длина их суммы не превосходила длины суммы оставшихся трёх векторов.

5. Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $DA \perp BC$ и $DB \perp CA$. Докажите, что $DC \perp AB$.

6. Дан набор из 100 векторов на плоскости. Двое по очереди берут себе по одному вектору, пока они не закончатся. Проигрывает тот, у кого длина суммы векторов, которые ему достались, окажется меньше. У кого из игроков есть непроигрышная стратегия?

7. Докажите, что в выпуклом многоугольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

8. Для произвольного $\triangle ABC$ докажите неравенства:

a) $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \le 3/2$;

b) $\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \ge -3/2$;

и определите, когда достигаются равенства.

9. На окружности $\omega(O; R)$ отметили точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n такие, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. Докажите, что для любой точки X выполнено неравенство

$$XA_1 + XA_2 + \ldots + XA_n \ge nR.$$