

Неравенство Гёльдера

1. Для неотрицательных действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^3\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^3\right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i\right)^3.$$

2. а) Пусть $a, b, c \geq 0$ и $x, y, z > 0$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

- б) Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{c^2 + a^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2} abc(a+b+c).$$

3. Пусть $x, y, z \geq 0$ и $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что

$$\frac{x^3}{1 + 9y^2xz} + \frac{y^3}{1 + 9z^2yx} + \frac{z^3}{1 + 9x^2zy} \geq \frac{(x+y+z)^3}{18}.$$

4. Пусть $a, b, c \geq 0$. Докажите, что

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

6. Для любых $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

7. В треугольнике $A_k B_k C_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$, $\angle A_k \geq 60^\circ$.

Докажите, что $2a_1 a_2 a_3 \geq b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 c_3$.

8. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

9. Пусть $x, y, z > 0$ и $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x} + 6y} + \sqrt[3]{\frac{1}{y} + 6z} + \sqrt[3]{\frac{1}{z} + 6x} \leq \frac{1}{xyz}.$$