

Дискретное вероятностное пространство

1. События A и B независимые. Докажите, что события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также независимые.
2. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадает одинаковое число очков, равна $\frac{1}{6}$. Докажите, что кубик правильный, т.е. все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно.
3. Алиса бросает правильную монету $n+1$ раз, а Боб — n раз. Найдите вероятность того, что у Алисы выпадет строго больше «орлов», чем у Боба.
4. Докажите, что из попарной независимости событий A_1, A_2, A_3 не следует независимость в совокупности.
5. Джон стреляет по n мишеням. Вероятность попадания в i -ю мишень равна p_i . Найдите вероятность того, что Джон попадёт ровно в нечётное число мишеней.
6. Даны события $A_1, A_2, \dots, A_n$. Докажите, что
$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots$$
7. Из множества натуральных чисел от 1 до 2020 случайно выбирается 20 подмножеств. Найдите вероятность того, что множества не имеют общего элемента.
8. В самолёт, в котором N мест, заходят N пассажиров. Первый пассажир занимает случайное место. Каждый следующий садится на своё место, а если оно занято — на любое свободное. С какой вероятностью последний пассажир займёт своё место?
9. Даны неотрицательные действительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ такие, что $x_i + y_i = 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Для любого натурального m докажите, что
$$(1 - x_1 x_2 \dots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \dots (1 - y_n^m) \geq 1.$$