

Многочлен $1 + x + \dots + x^{p-1}$ неприводим над $\mathbb{Q}$

1. Пусть p простое, $\xi = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Докажите, что

a) многочлен $1 + x + \dots + x^{p-1}$ неприводимый над $\mathbb{Q}$;

b) если $a_0 + a_1\xi + \dots + a_{p-1}\xi^{p-1} = 0$ для рациональных чисел $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$, то $a_0 = \dots = a_{p-1}$.

2. Дано простое число p и два набора натуральных чисел $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$. Известно, что среди чисел вида $a_i + b_j$ ($1 \leq i, j \leq p$) ровно p чисел дают остаток 0 при делении на p , ровно p дают остаток 1, ..., ровно p дают остаток $p - 1$. Докажите, что в одном из наборов каждый остаток при делении на p встречается ровно по одному разу.

3. Игральный кубик бросается n раз. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел кратна 5.

4. Докажите, что натуральное число p является простым тогда и только тогда, когда каждый равноугольный многоугольник с p вершинами и рациональными длинами сторон является правильным.

5. Три человека A, B, C играют в следующую игру: выбирается случайным образом подмножество из k элементов множества $\{1, 2, \dots, 1986\}$ (все выборы имеют одинаковую вероятность). Если остаток суммы элементов выбранного подмножества по модулю 3 равен 0, 1 или 2, то побеждает игрок A, B или C соответственно. Найдите все значения k , для которых игроки A, B, C имеют равные шансы на победу.

6. Пусть $p > 2$ — простое число и $S = \{1, 2, \dots, 2p\}$. Найти количество p -элементных подмножеств множества S , сумма элементов которых делится на p ?