

Теорема Кронекера

1. По окружности длины 1 по ходу движения часовой стрелки прыгает кузнечик. Длины прыжков равны иррациональному числу α . В некотором месте на этой окружности вырыта ямка длины $\varepsilon > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в ямку.
2. Докажите, что множество $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ плотно на отрезке $[-1, 1]$, т.е. для любых чисел $x \in [-1, 1]$, $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число k , что $|x - \sin k| < \varepsilon$.
3. Докажите, что для любого натурального числа A найдётся натуральное число n такое, что десятичная запись числа 2^n начинается с числа A .
4. Докажите, что последовательность $([n\sqrt{2003}])_{n \in \mathbb{N}}$ содержит сколь угодно длинную геометрическую прогрессию со сколь угодно большим знаменателем.
5. Конечное число отрезков на прямой покрасили в белый цвет. Сумма длин покрашенных отрезков меньше $1 + \sqrt{2}$. В одной из белых точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по прямой на 1 влево или на $\sqrt{2}$ вправо. Докажите, что кузнечик не сможет всё время оставаться на белой части прямой.
6. Множество точек S на плоскости инвариантно относительно отражений от сторон правильного пятиугольника P . Докажите, что множество S всюду плотно.
7. Найдите все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
8. Найдите все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно равенство
$$f(2x - y) + f(2y - x) + 2f(x + y) = 9f(x) + 9f(y).$$