Метод перераспределения весов

1. В некоторых клетках таблицы стоя́т звёздочки так, что для каждой звёздочки количество всех звёздочек в её столбце совпадает с количеством всех звёздочек в её строке. Докажите, что количество строк, в которых есть хотя бы одна звёздочка, равно количеству столбцов, в которых есть хотя бы одна звёздочка.

2. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоя́т звёздочки так, что в каждом столбце стои́т хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна звёздочка такая, что в одной строке с ней находится больше звёздочек, чем в одном столбце с ней.

3. В библиотеке на полках стоят книги, при этом ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k + 1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.

4. На фестиваль приехало D гномов и E эльфов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф – не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них – соперников-гномов. Докажите, что $11D \leq 10E$.

5. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

6. Таблица $n \times n$, $n \geqslant 1000$, заполнена нулями и единицами так, что, если в какой-то клетке стоит 0, то сумма всех чисел в объединении её столбца и строки не меньше 1000. Докажите, что сумма чисел в таблице не меньше $500n$.

7. На плоскости даны n окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара окружностей не касается. Докажите, что эти окружности образуют хотя бы n точек пересечения.

8. Дан выпуклый n-угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между вершинами n-угольника содержит по крайней мере одну красную точку. Докажите, что $\frac{m}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{[(n-1)/2]}$.

9. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдутся два с общей стороной.

10. На плоскости нарисованы n прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдётся не менее $n-2$ треугольников.