

Жадные алгоритмы

1. На плоскости расположено несколько кругов, площадь объединения которых равна S . Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся кругов, суммарная площадь которых не меньше $S/9$.
2. Дано n верёвок. Любые две верёвки можно объединить в одну, связав концами. Стоимость объединения двух верёвок равна сумме их длин. Свяжите все верёвки в одну наиболее дешёвым способом.
3. Двое по очереди забирают по одному из 20 векторов. Проигрывает тот, чья длина суммы 10 взятых векторов меньше. У кого есть непроигрышная стратегия?
4. Даны трёхэлементные подмножества $A_1, A_2, \dots, A_n$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Докажите, что можно покрасить $\lfloor n/3 \rfloor$ его элементов так, чтобы ни одно из подмножеств не оказалось покрашенным целиком.
5. Найдите во взвешенном неориентированном связном графе остовное дерево (т.е. соединяющее все вершины графа) с наименьшей суммой весов рёбер.
6. Пусть $\mathcal{I}$ – непустая система подмножеств конечного множества X такая, что 1) если $A \in \mathcal{I}$ и $B \subset A$, то $B \in \mathcal{I}$ (в частности, $\emptyset \in \mathcal{I}$); 2) для любых $A, B \in \mathcal{I}$, где $|A| < |B|$, существует $x \in B \setminus A$ такой, что $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Каждому элементу $e \in X$ сопоставлен вес $\omega(e) \geq 0$. Жадный алгоритм по очереди выбирает $e_k \in \operatorname{Arg\,max}\{\omega(e) : \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e\} \in \mathcal{I}\}$ до тех пор, пока множество кандидатов непусто. Докажите, что полученное множество $\{e_1, \dots, e_m\}$ имеет наибольший суммарный вес среди всех множеств из $\mathcal{I}$.