

Пусть задана функция $f: A \rightarrow A$. *Орбитой* элемента x называется множество $\{x, f(x), f(f(x)), \dots\}$; если функция является биективной, то в орбиту также добавляются итерации обратной функции.

1. На круглой трассе расположены n машин в n различных точках. Все машины начали двигаться по трассе одновременно и с одинаковой скоростью, каждая – в своём направлении. Если две машины встречались в некоторой точке, они мгновенно разворачивались и продолжали движение в противоположных направлениях. Докажите, что в некоторый момент времени все машины будут находиться в начальных точках и двигаться в исходных направлениях.

2. Докажите, что для любой биекции $f: A \rightarrow A$ существуют функции $g_1, g_2: A \rightarrow A$ такие, что $f = g_2 \circ g_1$, а композиции $g_1 \circ g_1$ и $g_2 \circ g_2$ являются тождественными отображениями.

3. Положим $S = \{1, \dots, n\}$. Для любой биекции $f: S \rightarrow S$ через $c(f)$ обозначим количество её различных обит. Пусть даны k биекций $f_1, \dots, f_k$ из S в себя, докажите неравенство $c(f_1) + \dots + c(f_k) \leq n(k-1) + c(f_1 \circ \dots \circ f_k)$.

4. Дан многочлен $f(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и натуральное число a . Рассмотрим последовательность, заданную правилами $a_1 = a$ и $a_{n+1} = f(a_n)$. Известно, что множество простых чисел, делящих хотя бы один из членов этой последовательности, конечно. Докажите, что $f(x) = cx^k$ при некоторых $c, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

5. Множество L состоит из 2020 прямых общего положения на плоскости. Будем говорить, что прямая $\ell_1 \in L$ *ограничивает* другую прямую $\ell_2 \in L$, если все точки пересечения ℓ_2 с прямыми из L лежат в одной полуплоскости относительно ℓ_1 . Докажите, что найдутся прямые ℓ и ℓ' в L такие, что ℓ ограничивает ℓ' , а ℓ' не ограничивает ℓ .

6. Обозначим $S = \{1, 2, \dots, 999\}$. Функция $f: S \rightarrow S$ удовлетворяет равенству $f^{\circ(n+f(n)+1)}(n) = f^{\circ(nf(n))}(n) = n$ при всех $n \in S$. Докажите, что существует элемент $a \in S$ такой, что $f(a) = a$.

7. Дан многочлен степени $d \geq 2$ с натуральными коэффициентами: $P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_0$. Последовательность (b_n) задана равенствами $b_1 = a_0$ и $b_{n+1} = P(b_n)$ при всех натуральных n . Докажите, что для каждого натурального $n \geq 2$ существует простое число p , делящее b_n , но не делящее ни одно из чисел $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$.

8. S – конечное множество, а A – множество всех функций из S в S . Для некоторой функции $f \in A$ известно, что $f \circ g \circ f \neq g \circ f \circ g$ при всех $g \in A$, отличных от f . Докажите, что $f(f(S)) = f(S)$.

9. Множество M состоит из 2017 натуральных чисел. Для любого подмножества $A \subset M$ через $f(A)$ обозначим множество, состоящее из всех элементов множества M , которые делятся на нечётное количество элементов множества A . Найдите наименьшее количество цветов, в которое гарантированно возможно покрасить все непустые подмножества множества M так, чтобы из $A \neq f(A)$ следовало, что множества A и $f(A)$ окрашены в разные цвета.

10. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n . Положим $a_0 = n$, и $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k . Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ есть число, являющееся b -й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ линейный.

11. Найдите все функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такие, что при всех $a, b \in \mathbb{Z}$ верно равенство $f^{\circ(a^2+b^2)}(a+b) = af(a) + bf(b)$.