

1. В алфавите племени АБ всего две буквы: А и Б. При этом, если в любом слове вставить или вычеркнуть сочетание АА или ББ, то смысл слова не изменится. Верно ли, что слова АБ и БА имеют одинаковый смысл?
2. В алфавите племени ПС: П и С. При этом, если в любом слове вставить или вычеркнуть сочетание СС, ППП или ПСПС, то смысл слова не изменится. Верно ли, что слова ПС и СП имеют одинаковый смысл?
3. В ряд выложены n монеток, орлами вверх. За один ход можно выбрать любую не крайнюю монетку, лежащую орлом вверх, саму эту монетку убрать из ряда, а две её соседние монетки перевернуть. Найдите все $n \geq 3$, при которых за несколько ходов можно получить ряд из двух монеток.
4. В алфавите племени ААБ всего две буквы: А и Б. При этом, если в любом слове вставить или вычеркнуть сочетание ААА или БББ, то смысл слова не изменится. Кроме того, при замене друг на друга в любом месте слова сочетаний АБ и ББАА, а также БА и ААББ, смысл слова тоже не изменится. Верно ли, что слова АБ и БА имеют одинаковый смысл?
5. В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». Словом считается любая последовательность из $2n$ букв У и $2n$ букв Ы (число n фиксировано). Слова называются **похожими**, если одно из них можно получить из другого одной перестановкой соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы любые два из выбранных слов не были похожи?
6. Бинарное слово N состоит из нулей и единиц. Известно, что вычёркиванием букв из этого слова можно получить любое из 10000 слов, состоящих из 9999 единиц и одного нуля. Найдите наименьшее возможное количество букв в N .

7. Пусть n – натуральное число, а $S \subseteq \{0, 1\}^n$. Для набора $x_1, \dots, x_{2k+1} \in S$ не обязательно различных бинарных слов, их большинством назовём бинарное слово $y \in \{0, 1\}^n$, у которого бит i совпадает с наиболее часто встречающимся битом i среди $x_1, \dots, x_{2k+1}$. Известно, что для некоторого натурального числа k множество S удовлетворяет свойству P_k : для любых не обязательно различных $2k + 1$ бинарных слов из S их большинство принадлежит S . Докажите, что S удовлетворяет свойству P_k при всех натуральных k .

8. Пусть n – натуральное число, а $S \subseteq \{0, 1\}^n$. С каждым набором $C \in S$ проделываются следующие действия: если сумма элементов C равна $k > 0$, то элемент x , стоящий в C на k -й позиции, заменяют на $1 - x$ и проделывают операцию заново, а если C состоит только из нулей, процесс останавливается. Докажите, что этот процесс всегда конечен и найдите среднее количество действий, которое будет сделано до остановки процесса среди всех 2^n последовательностей множества S .

9. Дано натуральное число n и бесконечная периодическая последовательность $W = \dots x_{-1}x_0x_1x_2\dots$, состоящая из двух букв: a и b . Минимальный период W больше чем 2^n . Скажем, что непустое конечное слово U встречается в W , если существуют номера $k \leq \ell$ такие, что $U = x_kx_{k+1}\dots x_\ell$. Конечное слово U назовём *вездесущим*, если все четыре слова Ua , Ub , aU , и bU встречаются в W . Докажите, что существует не менее n вездесущих слов.

10. Пусть $B_n = \{0, 1\}^n$ – множество всех бинарных строк длины 2. Расстоянием между строками $(a_i)_{i=1}^n$ и $(b_i)_{i=1}^n$ называется сумма $d((a_i), (b_i)) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$. Подмножество $C_n \subset B_n$ называется РЕСС длины n и допуска m , если для каждой строки $(b_i) \in B_n$ существует единственная строка $(c_i) \in C_n$ такая, что $d((b_i), (c_i)) \leq m$. Докажите, что не существует РЕСС длины 90 и допуска 2.