

Пусть (A_i, m_i) , $i = \overline{1, n}$, – система материальных точек с суммарной массой m и центром M . Для произвольной точки P величина $I_P = m_1 PA_1^2 + m_2 PA_2^2 + \dots + m_n PA_n^2$ называется *моментом инерции*, относительно точки P .

1. Докажите равенства

(a) $I_P = I_M + \sum_{i=1}^n m_i \cdot PM^2$;

(b) $I_M = \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j A_i A_j^2$.

2. Докажите, что в любом тетраэдре сумма квадратов трёх рёбер, принадлежащих произвольной грани, меньше утроенной суммы квадратов трёх других его рёбер.

3. Докажите равенство $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

4. Даны окружность ω с центром C , точки A и B вне окружности и отрезок длины d . Найдите на окружности точку K такую, чтобы $KA^2 + KB^2 = t^2$.

5. Докажите равенство $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

6. Хорды AA_1 , BB_1 и CC_1 окружности с центром O пересекаются в точке X . Докажите, что $\frac{AX}{XA_1} + \frac{BX}{XB_1} + \frac{CX}{XC_1} = 3$, если и только если X лежит на окружности с диаметром OM , где M – центр масс треугольника ABC .

7. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты такие точки A_1 и B_2 , B_1 и C_2 , C_1 и A_2 , что отрезки A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 параллельны сторонам треугольника и пересекаются в точке P . Пусть O и R – центр и радиус описанной окружности треугольника ABC . Докажите равенство $A_1P \cdot PA_2 + B_1P \cdot PB_2 + C_1P \cdot PC_2 = R^2 - OP^2$.

8. Внутри окружности радиуса R расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не превосходит $n^2 R^2$.

9. Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ лежат на окружности ω , а M – их центр масс. Прямые $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ повторно пересекают эту ω в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$. Докажите неравенство $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \leq MB_1 + MB_2 + \dots + MB_n$.

- 10.** Внутри равностороннего треугольника ABC площади S взята произвольная точка N . Докажите, что площадь треугольника со сторонами NA , NB и NC не превышает $\frac{S}{3}$.
- 11.** Найдите все такие конфигурации из шести точек общего положения на плоскости, что треугольник, образованный любыми тремя из них, равен треугольнику, образованному тремя остальными.