

1. Найдите все простые числа $p > 2$, такие что оба числа $\frac{p+1}{2}$ и $\frac{p^2+1}{2}$ являются полными квадратами.
2. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен d . Может ли наибольший собственный делитель $n + 2$ быть равен $d + 2$?
3. Пусть n и d — натуральные числа, такие что $d > n > 1$ и $d \mid n^2 + 1$. Докажите, что $d > n + \sqrt{n}$.
4. Натуральное число n называется *совершенным*, если верно равенство $\sigma(n) = 2n$. Докажите, что все чётные совершенные числа представимы в виде $2^{k-1}(2^k - 1)$, где число $2^k - 1$ простое.
5. Найдите все пары (n, d) натуральных чисел, таких что d — делитель числа n , а $nd + 1$ — делитель числа $n^2 + d^2$.
6. Натуральные числа $a > b > 1$ таковы, что $b^2 + a - 1$ делит $a^2 + b - 1$. Докажите, что $b^2 + a - 1$ не является степенью простого числа.
7. Натуральное число a таково, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ у числа $n^2 a - 1$ есть делитель вида $nx + 1$, $x \in \mathbb{N}$. Докажите, что число a является полным квадратом.
8. Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, таких что $mn - 1 \mid n^3 + 1$.
9. Найдите все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $x^2 + x = y^3 + y^2 + y$.
10. Найдите все натуральные числа n и k , удовлетворяющие равенству $(n - 1)! + 1 = n^k$.
11. О натуральных числах m и n известно, что $m > n^{n-1}$ и все числа $m + 1, m + 2, \dots, m + n$ составные. Докажите, что существуют такие попарно различные простые числа $p_1, p_2, \dots, p_n$, что $p_k \mid m + k$ для всех $k = \overline{1, n}$.
12. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $a > 1$ такие, что a делится на произведение $a_1 a_2 \dots a_n$. Докажите, что $a^{n+1} + a - 1$ не делится на $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1)$.

- 13.** Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2 - 1 = y^{15}$. Докажите, что, если $x > 1$, то x делится на 5.
- 14.** Найдите все такие нечётные натуральные $n > 1$, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем n .
- 15.** Натуральные числа $x > 2$, $y > 1$ и z удовлетворяют равенству $x^y + 1 = z^2$. Пусть p — количество различных простых делителей числа x , а q — количество различных простых делителей числа y . Докажите, что $p \geq q + 2$.
- 16.** Найдите все такие составные числа n , что для любого разложения $n = xy$ на два натуральных множителя x и y сумма $x + y$ является степенью двойки.
- 17.** Найдите все простые числа p и натуральные числа x и y , удовлетворяющие равенству $x^3 + y^3 = p(xy + p)$.