Теорема Безу и ОТА

1. Теорема Безу. Докажите, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на многочлен $x - a$ равен $p(a)$.

2. Теорема о рациональных корнях. Докажите, что, если несократимая дробь $p/q \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то p делит a_0, а q делит a_n.

3. Решите уравнение $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

4. При каких a и b многочлен $p(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

5. Найдите все многочлены $p(x)$, удовлетворяющие тождеству $x \cdot p(x - 1) = (x - 26)p(x)$.

6. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$ делится на $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$?

7. Докажите, что многочлен из $\mathbb{R}[x]$ степени n имеет не более n корней с учётом кратности.

8. Докажите, что, если значения двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$ степени не выше n совпадают по крайней мере в $n+1$ точке, то эти два многочлена равны.

9. Пусть n – натуральное число, а $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, такой что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $\ldots$, $P(n) = n$. Докажите, что число $P(0)$ делится на $n!$.

10. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами от 0 до 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

11. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* такую тройку различных чисел (a, b, c), что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1 \ldots, 8$, содержащих 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

12. Пусть $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа 65^k при некотором $k \geqslant 2$. Докажите, что многочлен $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ не имеет рациональных корней.