Лемма об уточнении показателя

Пусть $p > 2$ – простое число, числа a и b таковы, что $p \mid a - b$ и $p \nmid ab$, а n – произвольное натуральное число.

1. Пусть $p \nmid k$. Докажите, что $v_p(a^{kn} - b^{kn}) = v_p(a^n - b^n)$.

2. Докажите равенство $v_p(a^{pn} - b^{pn}) = v_p(a^n - b^n) + 1$.

3. Докажите равенство $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$.

Пусть теперь числа a и b нечётны.

4. Докажите, что $v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b)$ при нечётном n.

5. Докажите, что $v_2(a^n - b^n) = v_2(a^2 - b^2) + v_2(n) - 1$ при чётном n.

Результаты последних трёх задач называются *LTE-lemma* или *лемма об уточнении показателя*.

6. На сколько нулей оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

7. Решите уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.

8. Найдите все натуральные числа n такие, что при некоторых взаимно простых x, y и натуральном $k > 1$ выполняется неравенство $x^k + y^k = 3^n$.

9. Докажите, что для каждого натурального числа $a > 2$ найдётся такое натуральное число $n > 1$, что $a^n - 1$ делится на n^2. Верно ли это утверждение для $a = 2$?

10. Найдите все числа $n \in \mathbb{N}$, такие что $n^2 \mid 2^n + 1$.

11. Дано натуральное число n. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$, где $a \in \mathbb{Z}$.

12. Найдите все нечётные натуральные числа $a, b < 2^{100}$ такие, что оба числа $a^b + b$ и $b^a + a$ делятся на 2^{100}.

13. Найдите все натуральные числа x, y и простые p такие, что оба числа $x^{p-1} + y$ и $x + y^{p-1}$ являются степенями p.

14. Найдите все тройки (a, b, k), $k \geqslant 2$, натуральных чисел такие, что число $(a^k + b)(b^k + a)$ является степенью двойки.

15. Найдите все тройки a, b, p натуральных чисел такие, что число p простое и $a^p = b! + p$.