

На клетчатой плоскости рассмотрим пути, соединяющие узлы сетки и состоящие из «шагов» двух видов: $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ и $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$. Для любых целых чисел $n, k \geq 0$ биномиальным коэффициентом C_n^k называется количество всевозможных путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, k) . Альтернативное обозначение: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

1. Докажите тождество $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n+1}^{k+1}$.

2. Докажите, что число C_n^k равно количеству способов выбрать k элементов в n -элементном подмножестве.

3. Бином Ньютона. Докажите тождество

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

4. Докажите равенство $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

5. Докажите следующие тождества, используя как можно больше разных точек зрения на биномиальные коэффициенты:

(a) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k};$

(b) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$

(c) $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots;$

(d) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^i C_m^{k-i} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k;$

(e) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$

6. Докажите тождества:

(a) $C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \dots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0$
при $1 \leq m \leq n;$

(b) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{4} C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1};$

(c) $C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{4} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}.$

(d) $C_n^0 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \times 1^m = 0$ при $m < n;$

(e) $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{m+1}^k C_{m+n-k}^{n-k} = 0$ при $m > 1.$

Диаграмма Юнга – это клетчатая фигура, выровненная по левой границе, в которой длины строк неубывают сверху вниз.

7. Сколько различных диаграмм Юнга можно нарисовать в прямоугольнике $m \times n$ так, чтобы верхний угол диаграммы совпадал с верхним углом прямоугольника?

8. Натуральное число n разбивают на сумму нескольких не обязательно различных слагаемых. Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми. Докажите, что количество способов это сделать так, что наибольшее слагаемое равно k , равно количеству способов сделать так, чтобы число слагаемых было равно k .

9. Сколько всего существует диаграмм Юнга с полупериметром n ?