

Материальной точкой называется пара (A, m) , где A – точка, а $m \in \mathbb{R}$ – ненулевое число. Точки $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ образуют систему материальных точек $\mathfrak{A}$, если $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$. Точка M – центр масс системы $\mathfrak{A}$, если $m_1 \overrightarrow{MA_1} + m_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$.

1. Докажите, что, если M – центр масс системы $\mathfrak{A}$, то $m_1 \overrightarrow{PA_1} + m_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{PA_n} = m \overrightarrow{PM}$ для любой точки P .

2. Докажите, что, если центр масс есть, то он единственен.

3. Докажите, что, если 1) у подсистемы системы $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ с суммарной массой m есть центр масс – точка M и 2) у системы $(\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A}) \cup \{(M, m)\}$ есть центр масс – точка N , то N – центр масс системы $\mathfrak{B}$.

4. Найдите координаты центра масс системы $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ точек, имеющих координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ соответственно.

5. На плоскости да треугольник ABC . Докажите, что для любой точки D найдутся массы a, b и c такие, что D – центр масс точек $(A, a), (B, b)$ и (C, c) .

6. **Теорема Менелая.** На прямых AB, BC и AC , содержащих стороны треугольника ABC , выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что равенство

$$(a) \quad \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1 \text{ равносильно пересечению } AA_1, BB_1 \text{ и } AA_1 \text{ в одной точке;}$$

$$(b) \quad \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1 \text{ равносильно принадлежности } C_1, A_1 \text{ и } B_1 \text{ одной прямой.}$$

7. **Теорема Ван Обеля.** Внутри треугольника ABC выбрана точка M . Лучи AM, BM и CM пересекают стороны BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $AC_1 : C_1B = p, AB_1 : B_1C = q$. Докажите, что $AM : MA_1 = p + q$.

8. На прямых AB , BC и CA выбраны точки C_1 , A_1 и B_1 , соответственно, так, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D . Докажите равенство $\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BB_1} + \frac{CD}{CC_1} = \frac{2}{3}$.

9. Выпуклый n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ описан около окружности ω с центром O . Для каждого $i = \overline{1, n}$ через $T_{i,j}$ обозначим точку касания стороны A_iA_j с окружностью ω . Докажите, что O – центр масс системы точек $(T_{1,2}, A_1A_2)$, $(T_{2,3}, A_2A_3)$, $\dots$, $(T_{n,1}, A_nA_1)$.

10. **Теорема Ньютона.** Докажите, что центр окружности, вписанной в выпуклый четырёхугольник, лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей.

11. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. Известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника. Докажите, что центр масс мух всегда совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC .

12. Докажите, что, если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они проходят через одну точку.

13. На доске был нарисован треугольник ABC . Влад отметил внутри этого треугольника произвольную точку D и нарисовал точки A_1 , C_1 и B_1 , симметричные точкам A , C и B относительно середин отрезков CD , BD и AD соответственно. Когда Влад отвернулся, к доске подбежал Дима и стёр с доски всё, кроме точек A_1 , C_1 и B_1 . Может ли Влад при помощи мела, линейки и циркуля восстановить на доске точку D ?

14. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены высоты $АН_A$, $ВН_В$, $СН_С$ и медиана $ВМ$; K – точка пересечения медианы $ВМ$ и высоты $АН_A$, T – точка на стороне BC , такая что $KT \parallel AC$, H – точка пересечения высот. Докажите, что прямые $Н_СН_A$, $НТ$ и AC пересекаются в одной точке.